ANNEXE :

RAPPELS MATHEMATIQUES

La parfaite assimilation du contenu de cette annexe est fondamentale pour l'étude des champs de vecteurs. C'est sur les notions données dans ce chapitre que reposent les bases des théories de l'électrostatique.

1 GRADIENT - DIVERGENCE - ROTATIONNEL

1.1 Définitions générales :

Soit un trièdre orthonormé $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. M étant un point de l'espace de coordonnées (x,y,z) on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

On peut alors définir des fonctions scalaires (champ scalaire) et des fonctions vectorielles (champ vectoriel) de point :

$$f(M) = f(x,y,z)$$

et

$$\vec{V}(M) = V_x(x,y,z)\vec{i} + V_y(x,y,z)\vec{j} + V_z(x,y,z)\vec{k}$$

- Le gradient est une fonction vectorielle du point attachée à une fonction scalaire du point.
- La divergence est une fonction scalaire du point attachée à une fonction vectorielle du point.
- Le rotationnel est une fonction vectorielle du point attachée à une fonction vectorielle du point.

1.2 Gradient d'une fonction scalaire

On appelle gradient de la fonction f, la quantité vectorielle :

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Exemple

Soit $f = x\,y - z^2$. Calculer $\overrightarrow{grad} f$ au point $(0,1,1)$.

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} - 2z\,\vec{k}$$

Au point $(0,1,1)$ $\quad \overrightarrow{grad}\, f = 1\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 2\times 1\,\vec{k}$

$$= \vec{i} - 2\,\vec{k}$$

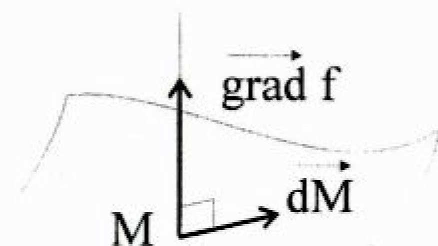
1.2.1 Surface de niveau (ou surface isoscalaire)

C'est une surface sur laquelle $f = Cte$. Donc pour tout point M de cette surface $f(M) = f(M_0) = Cte$.

Or

$$\overrightarrow{grad} f\,.\overrightarrow{dM} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dx = df$$

et comme $f(M) = Cte$, $df = 0$



isoscalaire

d'où : $\quad df = \overrightarrow{grad} f\,.\overrightarrow{dM} = 0$

$\overrightarrow{dM}$ est sur la surface de niveau, $\overrightarrow{grad} f$ est donc perpendiculaire à la surface du niveau.

Le gradient en un point est normal à la surface isoscalaire passant par ce point.

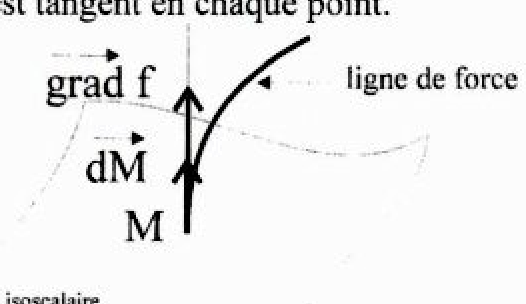


1.2.2 Lignes de forces

Elles sont telles que le vecteur gradient leur est tangent en chaque point.

Si on considère un élément $\overrightarrow{dM}$ sur une ligne de force, cet élément est parallèle à $\overrightarrow{grad} f$ et par suite :

$$\overrightarrow{grad} f \wedge \overrightarrow{dM} = \vec{0}$$



1.2.3 Propriété formelle du gradient

Le symbole $\overrightarrow{grad} f$ se comporte comme le symbole d de la différenciation :

$$\overrightarrow{grad}\,(f+g) = \overrightarrow{grad}\, f + \overrightarrow{grad}\, g$$

$$\overrightarrow{grad}\,(f.g) = f.\overrightarrow{grad}\,g + g.\overrightarrow{grad}\,f$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g.\overrightarrow{grad}\,f - f.\overrightarrow{grad}\,g}{g^2}$$

1.3 Divergence d'un champ de vecteurs

1.3.1 Définition

On appelle divergence du vecteur $\vec{V}$ (notée $div\,\vec{V}$) la quantité scalaire :

$$div\,\vec{V} = \vec{i}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + \vec{j}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + \vec{k}.\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

En tenant compte du fait que $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ on obtient :

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Exemples

1) Soit le champ de vecteurs $\vec{V}(M) = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Calculer $div\,\vec{V}$.

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

2) Soit le champ de vecteurs $\vec{A} = x^2z\,\vec{i} - 2y^3z\,\vec{j} + x\,y^2z\,\vec{k}$.

Calculer $div\,\vec{A}$ au point $(1,-1,1)$.

$$div\,\vec{A} = \frac{\partial\left(x^2z\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-2y^3z\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(x\,y^2z\right)}{\partial z}$$

$$div\,\vec{A} = 2xz - 6y^2z + x\,y^2$$

Au point $(1,-1,1)$, $div\,\vec{A} = 2-6+1 = -3$

$div\,\vec{A} = \frac{\partial x^2z}{\partial x} + \frac{\partial(-2y^3z)}{\partial y} + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial z}$

$div\,\vec{A} = 2zx - 6zy^2 + xy^2$

Au point $(1,-1,1)$:

$div\,\vec{A} = 2 - 6\times1 + 1 = -6+3 = -3$

1.4 Rotationnel d'un champ de vecteurs

On appelle rotationnel du vecteur $\vec{V}$ la quantité vectorielle :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{i}\wedge\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + \vec{j}\wedge\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + \vec{k}\wedge\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

En tenant compte du fait que

$\vec{i}\wedge\vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j}\wedge\vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k}\wedge\vec{i} = \vec{j}$

et $\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{0}$; $\vec{j}\wedge\vec{j} = \vec{0}$; $\vec{k}\wedge\vec{k} = \vec{0}$

on obtient :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

soit

$$\overrightarrow{rot}\,\vec V = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Exemple

Soit $\vec V = x z^3 \vec i - 2x^2 y z \vec j + 2 y z^4 \vec k$

calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec V$ au point $(1,-1,1)$.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec V = \vec i\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(2yz^4\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-2x^2yz\right)\right] + \vec j\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(xz^3\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2yz^4\right)\right]$$
$$+\vec k\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^2yz\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xz^3\right)\right]$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec V = \left(2z^4 + 2x^2y\right)\vec i + 3xz^2\vec j - 4xyz\vec k$$

Au point $(1,-1,1)$, $\overrightarrow{rot}\,\vec V = 3\vec j - 4\vec k$.

1.5 Opérateur nabla et relation entre les opérateurs gradient, divergence et rotationnel

Dans le calcul des quantités $\overrightarrow{grad} f$, $div\,\vec V$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec V$ on utilise le vecteur symbolique $\vec i \dfrac{\partial}{\partial x} + \vec j \dfrac{\partial}{\partial y} \vec k \dfrac{\partial}{\partial z}$. Ce vecteur symbolique est l'opérateur nabla, il est noté :

$$\vec\nabla = \vec i \frac{\partial}{\partial x} + \vec j \frac{\partial}{\partial y} \vec k \frac{\partial}{\partial z}$$

On obtient $\overrightarrow{grad} f$ en multipliant l'opérateur nabla par le scalaire f :

$$\vec\nabla f = \vec i \frac{\partial f}{\partial x} + \vec j \frac{\partial f}{\partial y} \vec k \frac{\partial f}{\partial z} = \overrightarrow{grad} f$$

On obtient $div\,\vec V$ en multipliant scalairement l'opérateur nabla par le vecteur $\vec V$:

$$\vec\nabla \vec V = \vec i \frac{\partial \vec V}{\partial x} + \vec j \frac{\partial \vec V}{\partial y} \vec k \frac{\partial \vec V}{\partial z} = div\,\vec V$$

On obtient $\overrightarrow{rot}\,\vec V$ en multipliant vectoriellement l'opérateur nabla par le vecteur $\vec V$:

$$\vec\nabla \wedge \vec V = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{rot}\,\vec V$$

1.5.1 Quelques formules en fonction de l'opérateur nabla

L'utilisation des relations de définition donne :

$\overrightarrow{grad}\,\lambda f = \vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda\,\vec{\nabla} f$, λ est une constante.

$\overrightarrow{rot}(\lambda \vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge (\lambda \vec{V}) = \lambda\,\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$

$$div\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$= \Delta f$ appelé laplacien de f

$$div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}\right) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{V}\right) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

où $\Delta \vec{V}$ est le vecteur de composantes ΔV_x, ΔV_y, ΔV_z

2 THEOREMES FONDAMENTAUX

2.1 Circulation et flux d'un vecteur

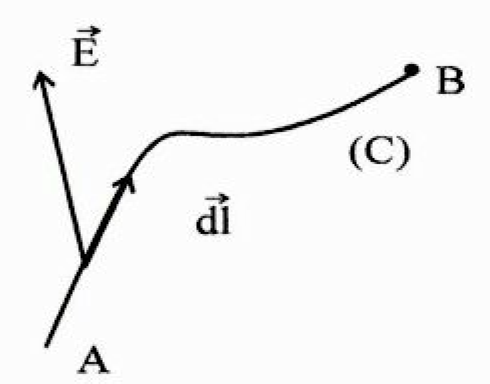
On définit d'abord la circulation d'un vecteur $\vec{V}$, le long d'un conteur $\mathcal{C}$ par :

$$C(\vec{V}) = \int_A^B \vec{V}.\overrightarrow{dl}$$

comme $\vec{V}(V_x, V_y, V_z)$ et $\overrightarrow{dl}(dx, dy, dz)$

on a :

$$C(\vec{V}) = \int_A^B (V_x dx + V_y dy + V_z dz)$$

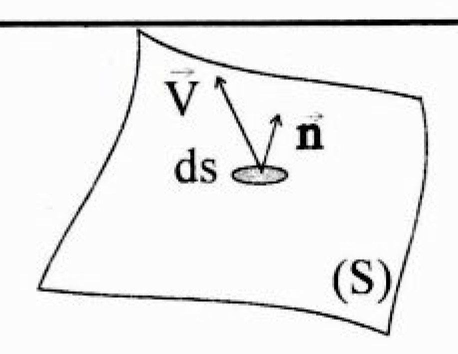


On définit aussi le flux d'un vecteur $\vec{V}$, à travers une surface (S) par :

$\Phi(\vec{V}) = \iint_{(S)} \vec{V}.\vec{n}\, ds$

$\vec{n}$ désigne le vecteur normal à la surface (S),

ds désigne l'élément d'aire de (S).



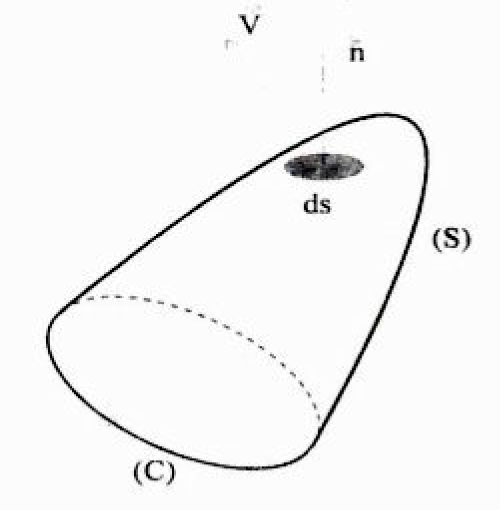
2.2 Théorème de Stokes

La circulation du vecteur $\vec{V}$ le long de la courbe (C) orientée, est égale au flux de $\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$ à travers (S) orientée.

$$\oint_{(c)} \vec{V}.\overrightarrow{dl} = \iint_{(S)} \vec{n}.\overrightarrow{rot}\,\vec{V}\, ds$$

(C) est une courbe fermée, orientée suivant la règle du tire-bouchon de Maxwell ou du bonhomme d'Ampère.

(S) étant une surface quelconque s'appuyant sur (C).

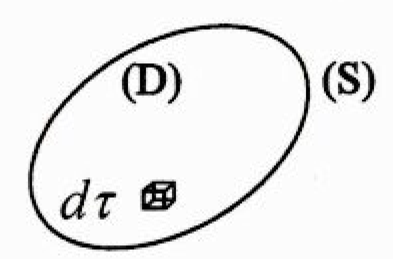


2.3 Théorème d'Ostrogradsky

Le flux d'un vecteur $\vec{V}$ à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de la divergence de $\vec{V}$ ($div\,\vec{V}$), sur le volume (D) délimité par (S).

$$\iint_{(S)} \vec{V}.\vec{n}\, ds = \iiint_{(D)} div\,\vec{V}\, d\tau$$

(S) est une surface fermée,
(D) est le domaine de l'espace limité par la surface (S),
$d\tau$ est un élément de volume.

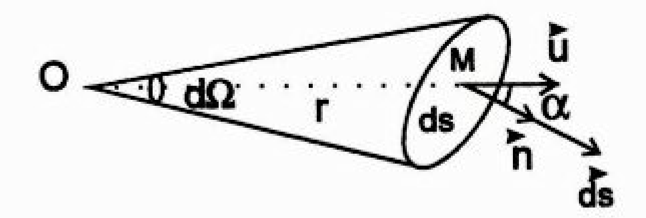


3 ANGLE SOLIDE

Par analogie avec l'angle dans le plan on définit l'angle solide. La notion d'angle solide donne un sens quantitatif à la notion d'ouverture d'un cône.

L'angle solide élémentaire sous lequel, d'un point O, on voit un élément de surface ds centré sur M est défini par :

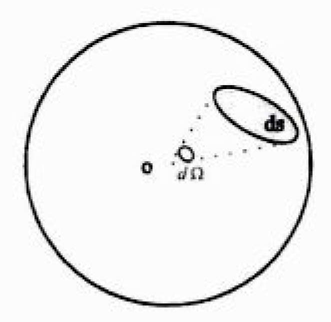
$$d\Omega = \frac{\vec{ds}.\vec{u}}{r^2} = \frac{ds\cos\alpha}{r^2} = \frac{d\Sigma}{r^2}$$



$\vec{ds}$: vecteur élément de surface

$\vec{u}$: vecteur unitaire de rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$
$\vec{n}$: vecteur unitaire normal à ds
$d\Sigma = ds\cos\alpha$: élément d'aire projeté.
Considérons une sphère de rayon R et découpons sur cette sphère un élément de surface ds .
L'angle solide sous lequel on voit, à partir de centre 0, l'élément ds est:

$$d\Omega = \frac{ds}{R^2}$$



L'angle solide d'un cône est la mesure de l'aire découpée par le cône sur la sphère de rayon unité.

L'unité d'angle solide est le stéradian (Sr).

Exemples de valeurs d'angle solide

-Pour une sphère : $\Omega = 4\pi$ Sr
-Cône de révolution de demi-angle au sommet α : $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$.


ETUSUP.com